CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

L'usage des calculatrices programmables et alphanumériques est autorisé sous réserve des dispositions définies dans la circulaire N°86-228 du 28 juillet 1986.

Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction des copies.

Ce problème comprend quatre parties qui peuvent être traitées de façon indépendante.

PROBLÈME

Dans tout le problème on considérera les fonctions de deux variables

$f(x,y) = \dfrac{y}{\pi}\dfrac{1}{1+y^2x^2}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $u(x,y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t,y)dt$.

On pose $u(+\infty, y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,y)dt$.

PARTIE I

Dans cette partie, le réel y sera strictement positif.

1. Calculer $\lim\limits_{y\to+\infty} f(x,y)$. Discuter suivant les valeurs de x.

2. a. Montrer que pour tout y réel strictement positif et pour tout x réel, u(x,y) est une intégrale convergente.

Montrer que $u(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\arctan(xy) + \dfrac{1}{2}$. En déduire la valeur de $u(+\infty,y)$.

b. Calculer $\lim\limits_{y\to+\infty} u(x,y)$. Discuter suivant les valeurs de x.

c. Représenter graphiquement u(x,10).

3. On considère g une fonction, bornée par le réel M_0, dérivable de dérivée bornée par le réel M_1 sur $\mathbb{R}$.

C'est-à-dire $|g(x)| \le M_0$ et $|g'(x)| \le M_1$ pour tout x réel.

Tournez la page S.V.P.

On veut montrer que pour tout y réel strictement positif $\lim_{y\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,y)g(t)dt = g(0)$.

a. Montrer que pour tout y réel strictement positif $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,y)g(t)dt$ est convergente.

b. Montrer que $\lim_{y\to+\infty}\int_{\frac{1}{\sqrt{y}}}^{+\infty} f(t,y)g(t)dt = 0$.

c. Montrer que pour y réel strictement positif $\left|f(t,y)\left(g(t)-g(0)\right)\right| \le \frac{M_1}{2\pi}$.

En déduire que $\lim_{y\to+\infty}\int_{-\frac{1}{\sqrt{y}}}^{+\frac{1}{\sqrt{y}}} f(t,y)\left(g(t)-g(0)\right)dt = 0$ puis en déduire que $\lim_{y\to+\infty}\int_{-\frac{1}{\sqrt{y}}}^{+\frac{1}{\sqrt{y}}} f(t,y)g(t)dt = g(0)$.

d. En déduire que $\lim_{y\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,y)g(t)dt = g(0)$.

4. Montrer que $\lim_{y\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,y)g(x-t)dt = g(x)$.

5. Montrer que si de plus la dérivée seconde de g est bornée sur $\mathbb{R}$ alors $\lim_{y\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t,y)}{t}g(t)dt = -g'(0)$.

PARTIE II

On considère $h(x,y) = \int_0^x u(t,y)dt$.

On rappelle que $u(x,y) = \frac{1}{\pi}\arctan(xy) + \frac{1}{2}$

et que $\arctan(a) + \arctan(\frac{1}{a}) = \frac{\pi}{2}$ si $a > 0$

$\arctan(a) + \arctan(\frac{1}{a}) = -\frac{\pi}{2}$ si $a < 0$.

Dans cette partie, le réel y sera strictement positif.

1. a. Calculer h(x, y).

b. Calculer $\lim_{y\to+\infty} h(x,y)$. Discuter suivant les valeurs de x.

2. Montrer que pour y constant, la fonction $x \mapsto h(x, y)$ est croissante.

3. Dans cette question, le réel y sera constant.
   a. Montrer que h(x, y) est équivalente à x lorsque x tend vers $+\infty$.
   b. Montrer que h(x, y) est équivalente à $\frac{-\ln|x|}{\pi y}$ lorsque x tend vers $-\infty$.
   c. En déduire les limites lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$ de h(x,y).

4. Déduire des questions précédentes le tracé de h(x,10).

PARTIE III

On considère la fonction $F_n(x) = f(x, n)\, e^x$ avec n un entier strictement positif.

1. **a.** Calculer $\lim_{n\to+\infty} F_n(x)$.
   b. Montrer que pour $n > 1$ l'équation $F'_n(x) = 0$ d'inconnue x, admet deux solutions réelles, notées x_n et y_n avec $x_n < y_n$.
   c. Montrer que x_n est équivalent à $\frac{1}{2n^2}$ et que y_n est équivalent à 2 (lorsque n tend vers $+\infty$).
   d. Tracer sur le même dessin les courbes représentatives de $F_{10}(x)$ et f(x,10) sur l'intervalle [-3,3].

2. **a.** Résoudre l'équation différentielle d'inconnue y:
   $y' - y = F_n(x)$ avec $y(0) = \frac{1}{2}$.
   On appellera $G_n(x)$ la solution.
   b. Calculer $\lim_{n\to+\infty} G_n(x)$. Que se passe-t-il en x = 0?

3. On considère l'équation différentielle $y' - y = f(x, n)$ avec $y(0) = \frac{1}{2}$.
   a. Montrer que la solution à cette équation vaut $H_n(x) = e^x\left(\frac{1}{2} + \int_0^x f(t,n)e^{-t}dt\right)$.
   (On ne cherchera pas à calculer $H_n(x)$).
   b. Montrer que $G_n(x) - H_n(x) = \frac{e^x}{\pi}\int_0^{nx} \frac{1 - e^{-\frac{u}{n}}}{1+u^2}\,du$, pour x positif.

Tournez la page S.V.P.

c. Montrer que $0 \leq \dfrac{1-e^{-\frac{u}{n}}}{u} \leq \dfrac{1}{n}$ pour tout u réel strictement positif.

En déduire que $\displaystyle\int_0^{nx}\left(\frac{u}{1+u^2}\,\frac{1-e^{-\frac{u}{n}}}{u}\right)du \leq \frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)$.

Puis en déduire que pour tout x positif $\lim\limits_{n\to+\infty}(G_n(x)-H_n(x))=0$.

Conclusion?

4. a. Résoudre l'équation différentielle $y''-2y'+y=F_n(x)$

avec $y(0)=0$ et $y'(0)=\dfrac{1}{2}$. On appellera $K_n(x)$ la solution.

b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n(x)$.

PARTIE IV

On considère $L(x,y)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\pi}\sin(\frac{t}{y})e^{-xt}dt$, on pose $L_1(x)=L(x,1)$.

1. Montrer que pour $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^*$ l'intégrale L(x, y) est convergente.

Dans la suite de cette partie sauf indication du contraire $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^*$.

2. a. Montrer, sans calculer $L_1(x)$, que L_1 est continue sur $[a,+\infty[$ pour tout a strictement positif.

b. En déduire que L_1 est continue sur $]0,+\infty[$.

c. Peut-on de la même façon démontrer que L_1 est dérivable sur $]0,+\infty[$?

3. a. Calculer $L_1(x)$, vérifier les résultats de la question précédente.

b. Prolonger L_1 par continuité en 0, la prolongée est-elle dérivable en 0?

4. Montrer que $L(x,y)=f(x,y)$ pour $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^*$.

Fin de l'énoncé